

# COMPLEMENTI DI FISICA

Massimo Masera – A.A. 2006/7

## ***PROPRIETÀ ELASTICHE DEI SOLIDI***

Da un punto di vista macroscopico i solidi sono generalmente caratterizzati da forma e volume propri e non sono facilmente deformabili. Con il termine di *corpo rigido* si indica un solido indeformabile, ossia un oggetto che mantiene la propria forma e volume sotto l'azione di qualsiasi sollecitazione. La nozione di corpo rigido, per quanto utile, è un'astrazione. Tutti i solidi, se sottoposti a sollecitazioni quali trazione, compressione, torsione, scorrimento, si deformano. Se le sollecitazioni sono intense le deformazioni possono essere permanenti e si può anche arrivare al cedimento strutturale (rottura) del materiale.

### **Deformazioni elastiche**

Una deformazione è detta **elastica** se il corpo torna allo stato originario quando vengono meno le forze che ne hanno causato la deformazione. Si hanno deformazioni elastiche quando le forze applicate sono di entità inferiore ad un limite che dipende dal materiale, dalla temperatura, dal tipo di deformazione considerata, etc. Una definizione più precisa di questo limite sarà data nel seguito; in generale considereremo forze sufficientemente modeste da mantenere le deformazioni nei limiti di elasticità del materiale.

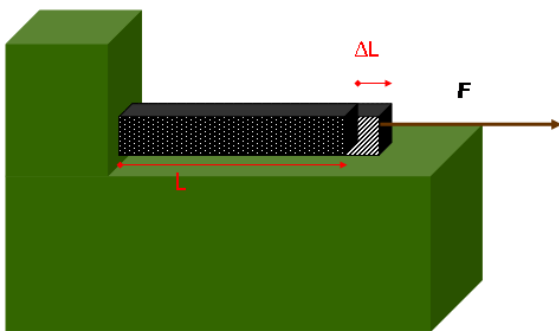
Per le deformazioni elastiche si osserva una relazione di proporzionalità tra sollecitazione e deformazione. Questo comportamento è noto come **legge di Hooke**<sup>1</sup>.

La legge di Hooke è valida per la maggior parte dei minerali, per il vetro, per i materiali ceramici e per i metalli. Per i metalli duttili è vera per carichi modesti.

### Trazione e compressione

In questo paragrafo saranno considerati materiali hookiani in regime elastico. Se viene applicata una forza di trazione (compressione) ad un corpo, questo subisce un allungamento (accorciamento) proporzionale ad essa. In figura 1 è rappresentata una sbarretta, vincolata ad un estremo, a cui è applicata una forza di trazione **F**. Per la legge di Hooke si ha

$$F \propto \Delta L \quad (\text{dove } F \text{ è il modulo della forza applicata})$$



**Figura 1** Forza di trazione applicata ad una sbarretta

La costante di proporzionalità dipende dal materiale, dalla temperatura e dalle caratteristiche geometriche dell'oggetto.

In particolare si osserva che, a  $\Delta L$  prefissato, la forza è direttamente proporzionale all'area della sezione trasversale della sbarretta ed inversamente proporzionale alla sua lunghezza. Per questa ragione si utilizzano lo **sfuerzo** (ingl. *stress*) di trazione o compressione (o carico specifico)  $\sigma$  e la

<sup>1</sup> Dal fisico inglese Robert Hooke (1635-1703)

**deformazione specifica**  $\varepsilon$  (ingl. *strain*) in luogo della forza  $F$  e dell'allungamento  $\Delta L$ . Queste grandezze sono definite come:

$$\begin{cases} \sigma = \frac{F}{S} \\ \varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \end{cases}$$

dove  $S$  è l'area della superficie ortogonale alla direzione di azione della forza. Lo sforzo si esprime in  $\text{N/m}^2$  mentre la deformazione specifica è una quantità adimensionale. Per la legge di Hooke si ha:

$$F \propto \Delta L \Rightarrow F = K(S, L)\Delta L \Rightarrow \sigma S = K(S, L)L\varepsilon \Rightarrow \sigma = \left[ \frac{K(S, L)L}{S} \right] \varepsilon \Rightarrow \sigma \propto \varepsilon$$

La costante di proporzionalità tra sforzo e deformazione specifica è indicata tra parentesi quadre e prende il nome di modulo di Young, che è indicato correntemente con la lettera  $E$ :

$$E = \frac{K(S, L)L}{S}$$

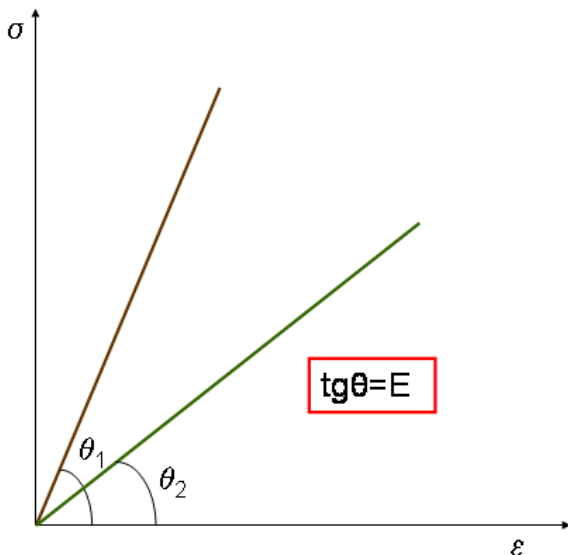
Visto che  $K$  è direttamente proporzionale a  $S$  ed inversamente proporzionale a  $L$ , il modulo di Young è indipendente da queste grandezze, ma dipende soltanto dalla temperatura e dal materiale di cui è fatto l'oggetto. Il modulo di Young ha le stesse dimensioni dello sforzo e si esprime pertanto in  $\text{Pa}$  ( $\text{N/m}^2$ ). Per deformazioni di trazione la legge di Hooke si scrive usualmente come:

$$\sigma = E\varepsilon \tag{1}$$

Lo sforzo ha convenzionalmente un segno negativo nel caso di sforzi di compressione in modo che l'espressione (1) sia corretta in valore e segno. Dalla (1) segue inoltre che:

$$F = \left( \frac{ES}{L} \right) \Delta L \tag{2}$$

La relazione tra deformazione e sforzo può essere visualizzata attraverso il grafico riportato in figura 2. Un corpo rigido ideale verrebbe rappresentato da una retta verticale (modulo di Young infinito). Il materiale 2 in figura è più deformabile del materiale 1.



**Figura 2** Rappresentazione grafica legge di Hooke

In tabella 1 è riportato il modulo di Young per diversi materiali a temperatura ambiente. Si vede che l'approssimazione del corpo rigido è giustificata per alcune applicazioni. Il modulo di Young nei metalli scende al crescere della temperatura. Per l'alluminio,  $E=5 \times 10^{10}$  a  $500^\circ\text{C}$  e per il ferro  $E=1.5 \times 10^{11}$  a  $500^\circ\text{C}$ .

**Tabella 1 Modulo di Young per alcuni materiali**

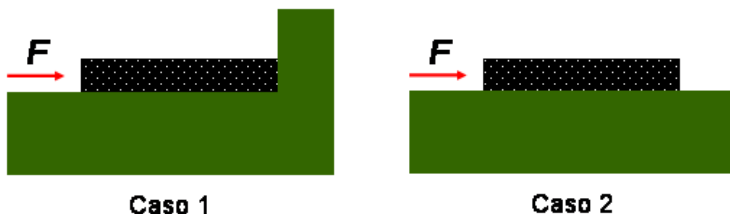
<i>Materiale</i>	<i>E (N/m<sup>2</sup>) a 20 °C</i>
Acciaio	$2,1 \times 10^{11}$
Alluminio	$7 \times 10^{10}$
Argento	$7,5 \times 10^{10}$
Ferro	$2 \times 10^{11}$
Gomma	$5 \div 80 \times 10^6$
Ottone	$9,1 \times 10^{10}$
Piombo	$1,4 \times 10^{10}$
Platino	$1,5 \times 10^{11}$
Polietilene	$1 \div 14 \times 10^8$
Rame	$1,1 \times 10^{11}$
Tungsteno	$3,5 \times 10^{11}$
Vetro per finestre	$7 \times 10^{10}$
Calcestruzzo	$2,3 \times 10^{10}$
Granito	$2,5 \times 10^{10}$

Esempi

Un filo di alluminio di diametro  $d=2 \text{ mm}$  e di lunghezza  $l=1,2 \text{ m}$  si allunga di  $\Delta l=0,65 \text{ mm}$  se sottoposto a trazione con una forza  $F=120 \text{ N}$  (pari alla forza peso di una massa di poco superiore a 12 Kg). Infatti:

$$\sigma = \frac{F}{S} = 3,82 \times 10^7 \text{ N/m}^2 \qquad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = 0,54 \times 10^{-3} \Rightarrow \Delta l = l\varepsilon = 0,65 \text{ mm}$$

Come secondo esempio si consideri una sbarra di lunghezza  $L$ , area trasversa  $S$  e densità  $\rho$  nei due casi rappresentati in figura 3. Si supponga trascurabile l'attrito tra la sbarra ed il piano nel secondo caso. Si calcoli  $\Delta L$  nei due casi.



**Figura 3 Compressione di una sbarra vincolata (caso 1) e libera di muoversi (caso 2)**

Nel primo caso, la relazione (2) può essere applicata direttamente:

$$|\Delta L| = \frac{FL}{ES} \quad (\text{Si tratta di una compressione e quindi } \Delta L < 0)$$

In questo caso la sbarretta è in quiete, grazie alla presenza del vincolo. La forza esterna viene propagata attraverso la sbarretta fino al vincolo. Per la terza legge della dinamica, il vincolo esercita una forza di compressione sulla sbarretta pari, in modulo, a  $F$ . Nel secondo caso, la sbarretta è libera di muoversi per effetto della forza esterna. Il moto sarà uniformemente accelerato con accelerazione  $a = \frac{F}{m} = \frac{F}{\rho LS}$ . La forza viene ancora propagata all'interno della sbarretta, ma con intensità decrescente. Si consideri infatti una generica sezione (Figura 4) a distanza  $x$  dall'estremo sinistro. La porzione di sbarra a sinistra della sezione considerata esercita una forza  $T(x)$  sulla porzione di sbarra che sta a destra, che ha lunghezza  $(L-x)$ . Il valore di  $T(x)$  si può ricavare

considerando che la porzione di lunghezza  $(L-x)$  si muove di moto uniformemente accelerato con accelerazione  $a$ . Quindi  $T(x) = m_{(L-x)}a = \rho(L-x)S \frac{F}{\rho LS} = F \left(1 - \frac{x}{L}\right)$ . Si noti che  $T(0)=F$  e  $T(L)=0$ .



**Figura 4 Sbarretta in movimento**

Si consideri ora la porzione infinitesima di sbarra che si estende tra  $x$  e  $x+dx$ , di massa  $dm = \rho S dx$ . Indichiamo con  $d\xi$  la deformazione (in valore assoluto) della porzione di sbarretta di lunghezza a riposo  $dx$ . La deformazione relativa è  $\frac{d\xi}{dx}$ . Dato che si può trascurare la variazione della forza  $T$  nel tratto infinitesimo di sbarretta considerato, è possibile applicare ad essa la (2):

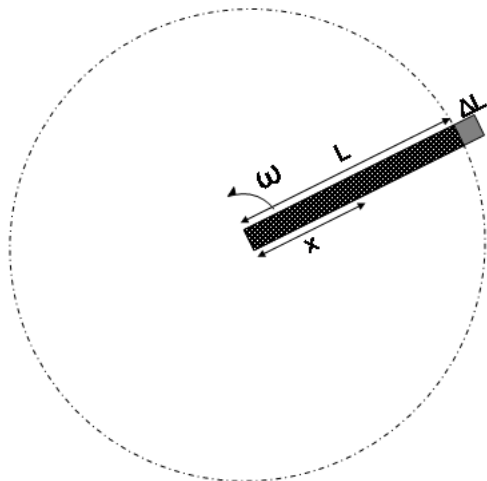
$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{T(x)}{ES} \Rightarrow d\xi = \frac{F}{ES} \left(1 - \frac{x}{L}\right) dx$$

La deformazione complessiva può essere ricavata per integrazione:

$$\Delta L' = \frac{F}{ES} \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right) dx = \frac{FL}{2ES} = \frac{\Delta L}{2}$$

In assenza di vincolo, l'accorciamento della sbarra è pari alla metà di quello che si osserva in situazione di equilibrio statico. La legge di Hooke, nella sua forma (1) o (2) può essere applicata ad un corpo macroscopico solo quando questo è in quiete.

Un terzo esempio è rappresentato in figura 5. Una sbarretta è vincolata ad un estremo attorno al



**Figura 5 Sbarretta rotante**

quale può ruotare con velocità angolare  $\omega$  costante. Sotto l'azione delle forze inerziali la sbarretta si allunga di una quantità  $\Delta L$ . Per calcolare l'entità dell'allungamento, si consideri che ciascun elemento della sbarretta posto ad una generica distanza  $x$  dal centro di rotazione, è soggetto ad una forza inerziale  $dF = dm\omega^2 x = \rho S \omega^2 x$ . Pertanto la porzione di sbarra situata tra  $x$  ed  $L$  esercita sulla porzione di sbarra interna situata tra  $0$  e  $x$ , una forza traente di entità pari a:

$$T(x) = \int_x^L \rho S \omega^2 x dx = \frac{1}{2} \rho S \omega^2 (L^2 - x^2)$$

L'allungamento  $d\xi$  dell'elemento di sbarretta situato tra  $x$  e  $x+dx$  si calcola applicando la (2):

$$d\xi = \frac{T(x)}{ES} dx = \frac{\rho\omega^2}{2E} (L^2 - x^2) dx$$

Per integrazione su tutta la sbarretta si valuta l'allungamento complessivo:

$$\Delta L = \frac{\rho\omega^2}{2E} \int_0^L (L^2 - x^2) dx = \frac{m\omega^2 l^2}{3SE}$$

### Energia potenziale elastica

Si assuma che, per effetto di una forza di trazione  $F$ , una sbarretta passi dalla lunghezza a riposo  $L$  ad una lunghezza  $x > L$ . Si ha che:

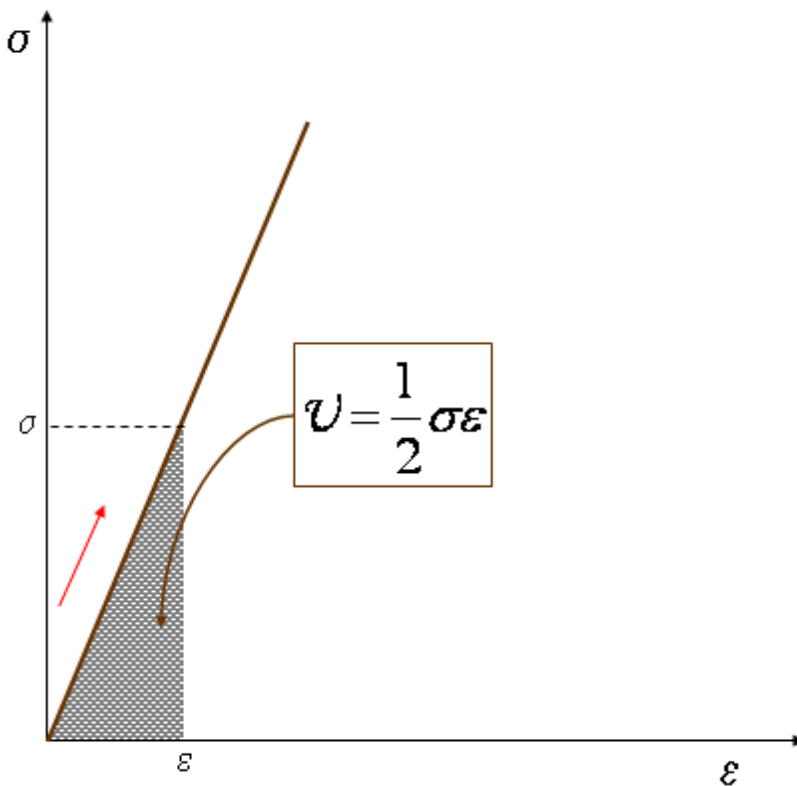
$$\varepsilon = \frac{x - L}{L} \Rightarrow d\varepsilon = \frac{dx}{L}$$

Se  $F$  provoca un allungamento relativo  $\varepsilon$ , allora un incremento elementare della forza  $F + dF$  determinerà un allungamento relativo  $\varepsilon + d\varepsilon$ . Il lavoro elementare per unità di volume corrispondente è:

$$\frac{dL}{V} \equiv d\mathcal{U} = \frac{(F + dF)dx}{SL} \cong \frac{F}{SL} L d\varepsilon = \sigma d\varepsilon = E\varepsilon d\varepsilon \quad (\text{si è usata la (1) nell'ultimo passaggio})$$

Questo lavoro viene immagazzinato nell'oggetto sottoposto a trazione come energia potenziale elastica. La quantità di energia potenziale elastica per unità di volume associata ad un'elongazione relativa  $\varepsilon$  può essere determinata per integrazione:

$$\mathcal{U} = E \int_0^\varepsilon \varepsilon d\varepsilon = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon \quad (3)$$



**Figura 6** Densità di energia potenziale elastica

In figura 6 è rappresentato un grafico di  $\sigma$  in funzione di  $\varepsilon$ . Il significato dell'area sottesa dalla curva (lineare in regime di elasticità) è proprio quello di energia per unità di volume conservata nel materiale soggetto a deformazione.

### Legge di Poisson

Se un corpo è soggetto ad una trazione, oltre ad una elongazione nella direzione di azione della forza, si osserva una riduzione delle dimensioni trasverse. Nel caso di una compressione si osserva invece un aumento delle dimensioni trasverse. Se si considera un cilindro di lunghezza  $L$  e raggio di base  $r$ , si osserva, nei limiti di elasticità del materiale che:

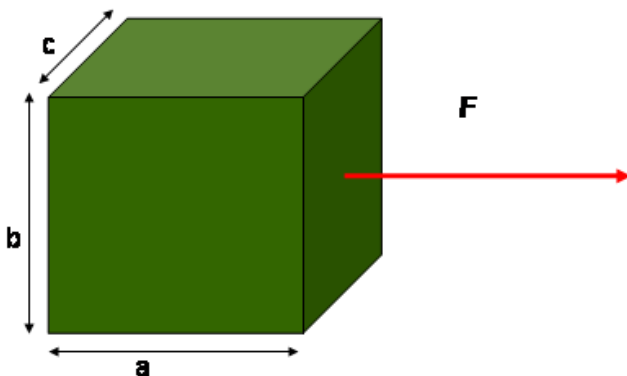
$$\frac{\Delta r}{r} = -\nu \frac{\Delta l}{l} = -\nu \varepsilon \quad (4)$$

dove  $\nu$  è una costante adimensionale positiva che dipende dal materiale, detta *coefficiente di Poisson*. La (3) è nota come legge di Poisson. Sperimentalmente si riscontra che  $\nu \leq 0,5$ .

**Tabella 2 Coefficienti di Poisson**

Materiale	Coeff. di Poisson
Vetro	0,25
Ferro	0,3
Acciaio	0,3
Rame	0,34
Ottone	0,35
Piombo	0,4
Caucciù	0,5

Il significato del limite empirico pari a 0,5 per il coefficiente di Poisson è legato al fatto che il volume di un corpo sottoposto a trazione non diminuisce.



**Figura 7 Coefficiente di Poisson e variazione di volume**

Si consideri a questo scopo il parallelepipedo, supposto in quiete, illustrato in Figura 7. Per effetto della trazione si ha, per le leggi di Hooke e Poisson, che:

$$\begin{cases} \frac{\Delta a}{a} = \frac{\sigma}{E} \\ -\nu \frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b} = \frac{\Delta c}{c} \end{cases}$$

Valutiamo, al primo ordine, la variazione del volume del parallelepipedo, che passa da  $V = abc$  a  $V + \Delta V$ :

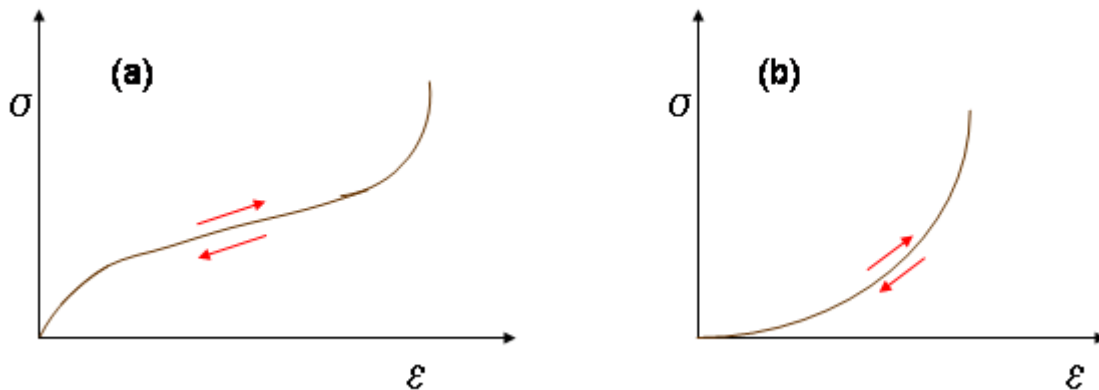
$$V + \Delta V = (a + \Delta a)(b + \Delta b)(c + \Delta c) \cong abc + ab\Delta c + ac\Delta b + bc\Delta a$$

$$\text{Quindi } \Delta V \cong abc \frac{\Delta c}{c} + abc \frac{\Delta b}{b} + abc \frac{\Delta a}{a} = V \frac{\Delta a}{a} (1 - 2\nu)$$

Questo significa che se  $\nu = 0,5$  il volume non varia per effetto della trazione, mentre per  $\nu < 0,5$  il volume aumenta.

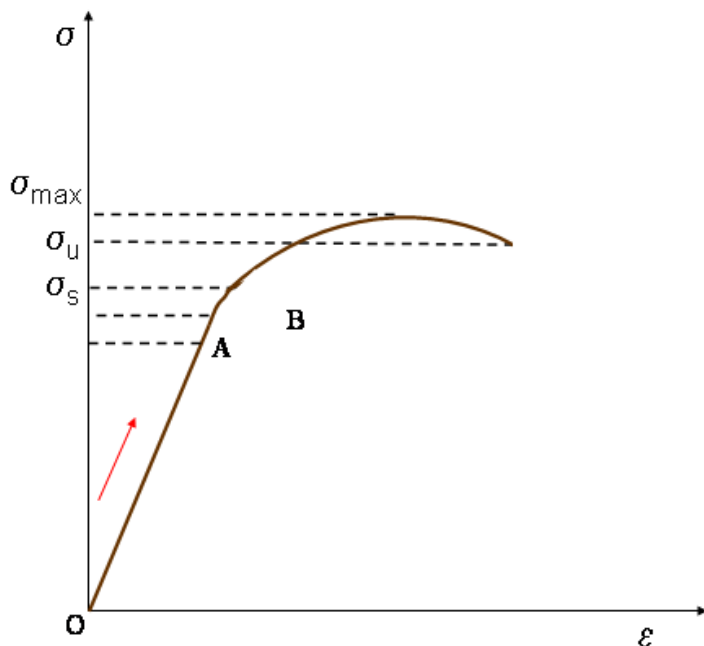
### Materiali non hookiani, deformazioni plastiche, rottura.

In Figura 8 sono rappresentate delle deformazioni elastiche non hookiane. L'andamento illustrato a sinistra (Fig. 8-a) è tipico di materiali molli come la gomma: la maggior parte della deformazione corrisponde ad un intervallo stretto di carichi. L'andamento illustrato in Fig. 8-b è invece proprio dei tessuti molli animali: ad un carico modesto corrisponde un'elongazione apprezzabile che però aumenta poco al crescere del carico.



**Figura 8** Deformazioni elastiche di materiali non hookiani (vedi testo)

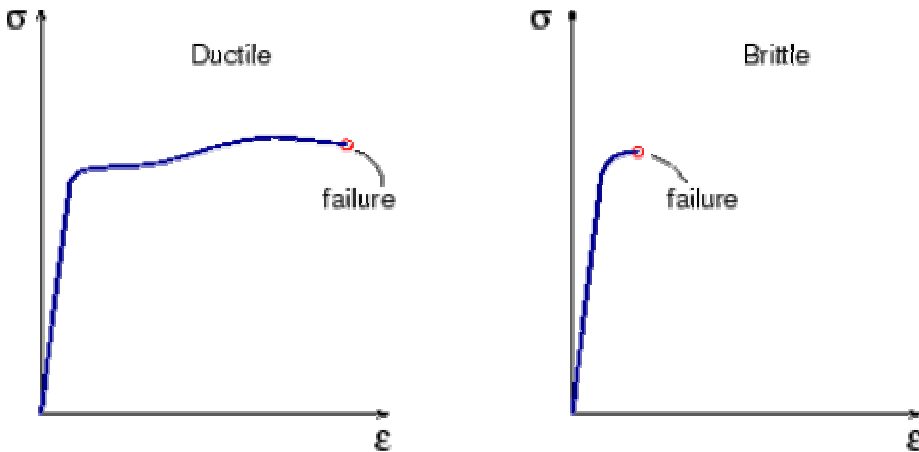
Anche i materiali che si deformano in accordo con la legge di Hooke per piccoli carichi, presentano delle importanti deviazioni dalla linearità al crescere dello sforzo applicato. Un andamento qualitativo dello sforzo in funzione della deformazione specifica è illustrato in Figura 9.



**Figura 9** Carichi di snervamento e rottura

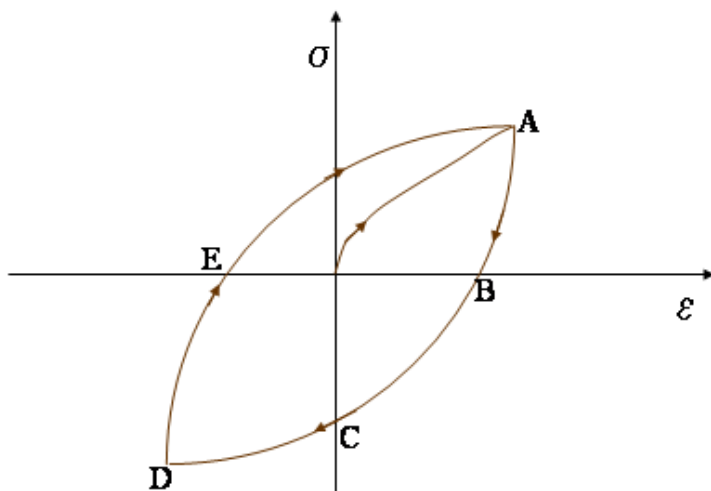
La regione compresa tra i punti O e A è la regione di linearità per la quale vale la legge di Hooke. Tra i punti A e B (limite elastico) le deformazioni sono ancora elastiche nel senso che, se viene rimossa la forza di trazione, il corpo ritorna nella situazione originaria. Oltre il punto B si ha deformazione permanente. Per carichi maggiori di  $\sigma_s$  si ha un cambio di pendenza della curva: il materiale si allunga molto per modesti incrementi del carico fino al carico massimo sstenibile  $\sigma_{MAX}$ . Il carico  $\sigma_s$  prende il nome di carico di snervamento. Molte leghe non presentano il fenomeno dello snervamento: in questo caso per aumentare l'elongazione occorre aumentare sensibilmente lo sforzo.

Lo sforzo  $\sigma_U$  prende il nome di carico di rottura. Materiali con alto carico di rottura sono detti tenaci. I materiali che mostrano una grande capacità di deformazione plastica prima della rottura, quali l'acciaio a basso tenore di carbonio e l'alluminio, sono detti duttili (cfr. Fig. 10) mentre i materiali che hanno un carico di rottura vicino al limite di elasticità e mostrano conseguentemente una scarsa deformabilità plastica sono detti fragili. Il vetro, la ghisa, i materiali lapidei hanno un comportamento di questo tipo.



**Figura 10** Materiale duttile (a sinistra) e fragile (a destra)

Quando si supera il limite elastico non c'è più una relazione univoca tra sforzo e deformazione: è importante la storia precedente dell'oggetto. Questa proprietà è detta isteresi elastica del materiale. Con riferimento alla figura 11, se si fa scendere l'entità dello sforzo una volta arrivati nel punto A, si osserva che la deformazione varia più lentamente rispetto all'andata: quando lo sforzo applicato è nullo, si osserva una deformazione residua (punto B). Applicando uno sforzo di compressione (negativo) si arriva ad una deformazione nulla (punto C). Facendo variare lo sforzo tra i due estremi  $\sigma_D$  e  $\sigma_A$  si descrive una curva chiusa detta ciclo di isteresi elastica. L'area racchiusa dalla curva  $\oint \sigma d\epsilon$  rappresenta l'energia per unità di volume dissipata in un ciclo: il materiale si riscalda se soggetto a cicli di trazione e compressione in regime non elastico.



**Figura 11** Ciclo di isteresi elastica

In Tabella 3 sono riportati alcuni valori di del carico specifico che un materiale può sostenere senza che vi siano deformazioni permanenti (ingl. yield strength) e del massimo sforzo sostenibile (ingl. ultimate strength). In tabella, per alcuni materiali sono riportati i massimi sforzi sostenibili in



trazione e compressione. Specialmente nel caso dei materiali da costruzione, la seconda proprietà è più importante.

**Tabella 3 Valori di carico massimo**

<i>Materiale</i>	<i>Yield strength (MPa)</i>	<i>Ultimate strength (tensile) (MPa)</i>	<i>Compressive ultimate Strength (MPa)</i>
Acciaio ASTM A36	250	400	
Acciaio AISI Type S2	950	1050	
Acciaio AISI grade 18Ni	2320	2359	
Ghisa 4.5% C (ASTM A-48)		200	1000
Rame 99.9%	70	220	
Alluminio (2014-T6)	830	900	
Piombo (ricotto)		12	
Nylon	45	75	
Calcestruzzo		2	17
Granito		25	100

Qual è l'altezza massima di una costruzione in calcestruzzo o in acciaio oppure in granito? Per semplicità si consideri un oggetto cilindrico, che appoggi su una base. Se la base è di raggio  $R$ , l'altezza misura  $H$  e la densità del materiale è  $\rho$ , allora la massa vale  $M = (\pi R^2 H)\rho$ . Lo sforzo di compressione alla base è  $\sigma = \frac{Mg}{S} = \rho g H$ . Questo sforzo deve essere minore dello sforzo massimo:

l'altezza massima del cilindro si ha quando  $\sigma = \sigma_u \Rightarrow H_{\max} = \frac{\sigma_u}{\rho g}$ . Quindi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Acciaio: } \frac{\sigma_u}{\rho g} \cong \frac{1000 \times 10^6}{7800 \times 9,8} = 13000 \text{ m} \\ \text{Calcestruzzo: } \frac{\sigma_u}{\rho g} \cong \frac{17 \times 10^6}{2600 \times 9,8} = 667 \text{ m} \\ \text{Granito: } \frac{\sigma_u}{\rho g} \cong \frac{100 \times 10^6}{2700 \times 9,8} = 3700 \text{ m} \end{array} \right.$$

Se la forma è conica, la massa è un terzo rispetto a quella di un oggetto di forma cilindrica, quindi l'altezza massima è il triplo di quella appena calcolata. Per una montagna è dell'ordine di 10000 m.

### Sforzi da dilatazioni termiche

Un materiale non costretto da vincoli subisce dilatazione termica al crescere della temperatura:

$$\frac{\Delta L}{L} = \alpha T \text{ dove } \alpha \text{ (espresso in } K^{-1}) \text{ è una caratteristica del materiale.}$$

Un oggetto che sia limitato alla lunghezza fissa  $L$  da un vincolo esterno esercita su di esso un carico specifico di compressione che cresce al crescere della temperatura. Questo carico è determinato dalla legge di Hooke:

$$\sigma = E \varepsilon = E \frac{\Delta L}{L} = E \alpha \Delta T$$

Nel caso dell'acciaio  $\alpha = 1,1 \times 10^{-5} K^{-1}$  e quindi  $\sigma = 2,3 MPa/K$

### Scorrimento

Se una forza è applicata parallelamente ad una superficie di un corpo, si parla di sollecitazione di taglio. Il rapporto tra il modulo della forza e l'area della superficie sulla quale la forza agisce, prende il nome di sforzo di taglio. Uno sforzo di taglio tende a provocare una deformazione per scorrimento, come schematizzato in Figura 12.

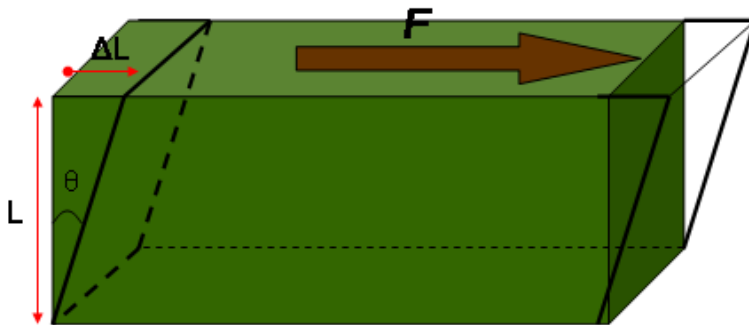


Figura 12 Scorrimento

Nei limiti di elasticità del materiale la legge di Hooke per sforzi di taglio prende la forma di:

$$\sigma = G \frac{\Delta L}{L} \cong G\theta \text{ dove } G \text{ è il modulo di rigidità o di taglio.}$$

Tabella 4 Modulo di rigidità

Materiale	G (GPa)
Acciaio	85
Alluminio	25
Ferro	80
Ottone	30
Piombo	5
Platino	60
Rame	40
Tungsteno	140
Vetro	25÷32

Si può dimostrare che le tre costanti introdotte finora: modulo di Young, di rigidità e coefficiente di Poisson, esiste la relazione:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Come esempio di scorrimento, si consideri un cubetto di ferro di spigolo  $L=1$  cm. Supponiamo che vi sia uno scorrimento di  $d=10 \mu\text{m}$  di una faccia rispetto a quella opposta. Quanto vale la forza di taglio che determina il fenomeno?

$$\sigma = \frac{F}{L^2} = G \frac{d}{L} \Rightarrow F = GLd = 8000 \text{ N}$$

Si tratta di una forza di poco superiore alla forza peso di una massa di 800 Kg.

### Torsione

Se si considera un cilindro, come quello mostrato in Figura 13, e si applica un momento torcente ad una base, mentre l'altra è mantenuta vincolata, si ha una deformazione per torsione. Se il momento

è modesto, il cilindro torna nella posizione iniziale una volta che la sollecitazione sia cessata. Per effetto della torsione, la base ruota di un angolo  $\theta$ . Nei limiti di elasticità hookiana del materiale si osserva proporzionalità tra il momento applicato  $M$  e l'angolo di rotazione:

$$M = k\theta, \text{ con } k = \frac{\pi GR^4}{2L}$$

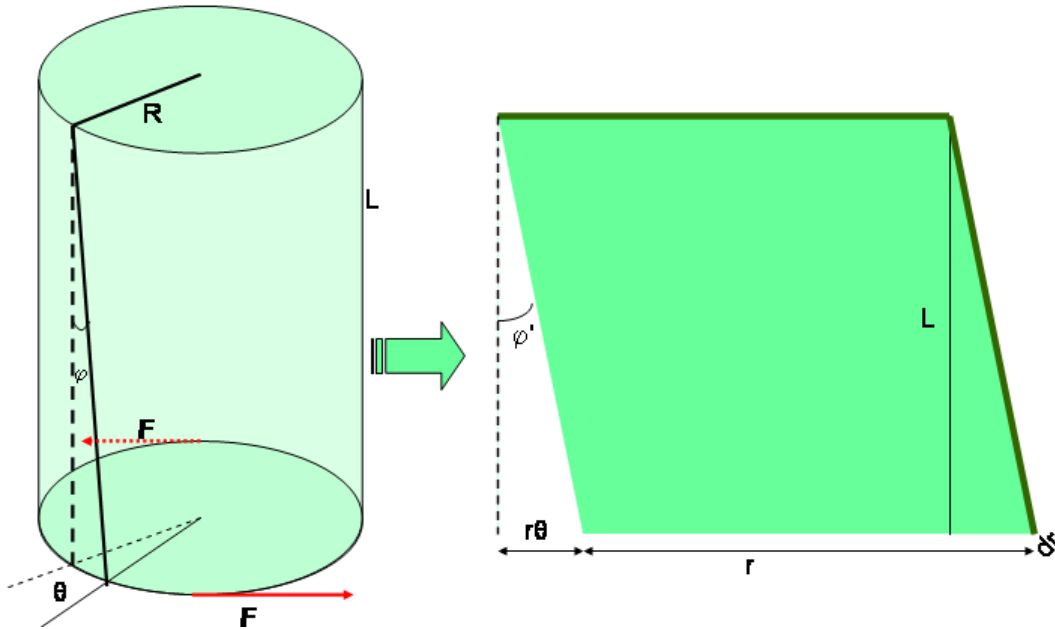


Figura 13 Torsione (si veda il testo)

Dove la costante di proporzionalità  $k$  è legata al modulo di rigidità del materiale e alle sue caratteristiche geometriche: la torsione è apprezzabile se  $R$  è piccolo e  $L$  è grande, ossia per oggetti filiformi. Per ricavare la relazione tra  $k$  e  $G$ , si faccia riferimento alla Figura 13. Si consideri una corona cilindrica di raggio  $r \leq R$  e spessore  $dr$ : se si immagina di sviluppare questa corona su di un piano si ottiene un parallelepipedo con dimensioni  $2\pi r \times dr \times L$ . Per effetto della torsione, una base (quella inferiore nella figura) scorre di una quantità  $r\theta$  rispetto all'altra.

Per definizione di modulo di rigidità si ha:

$$G = \frac{\sigma}{\varphi'} = \frac{dF}{2\pi r dr} \frac{L}{r\theta} = \frac{LdF}{2\pi\theta r^2 dr} \Rightarrow dF = \frac{2\pi G\theta r^2 dr}{L} \Rightarrow dM = rdF = \frac{2\pi G\theta r^3 dr}{L}$$

Integrando su  $r$ , si ottiene il valore della costante di proporzionalità tra angolo di rotazione e momento applicato:

$$M = \frac{2\pi G\theta}{L} \int_0^R r^3 dr = \left( \frac{\pi GR^4}{2L} \right) \theta$$

Il lavoro compiuto dalle forze esterne è  $W = \int_0^\theta M d\theta' = k \int_0^\theta \theta' d\theta' = \frac{1}{2} k\theta^2$ .

Questo lavoro è immagazzinato nel cilindro come energia potenziale elastica.

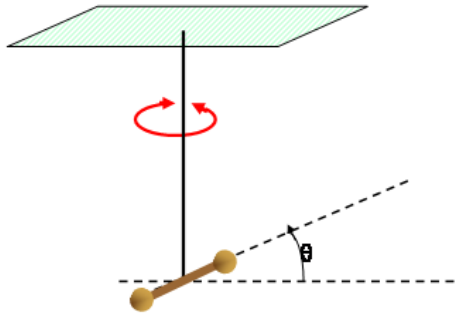
In Figura 14 è mostrato un pendolo di torsione: un filo è fissato ad un'estremità al soffitto ed un oggetto di momento di inerzia  $I$  è appeso all'estremo libero. Per ruotare l'oggetto di un angolo  $\theta_0$  come illustrato in figura, occorre applicare un momento  $M = k\theta_0$ . Quando l'oggetto viene lasciato libero, esso entrerà in oscillazione per effetto del momento meccanico reattivo  $-k\theta$  esercitato dal filo.

Le oscillazioni sono descritte dalla seconda equazione cardinale del moto  $M = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$ , che in questo caso si scrive come:

$$-k\theta = I \frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{k}{I}\theta = 0$$

Si tratta dell'equazione di un oscillatore armonico con pulsazione  $\omega = \sqrt{\frac{k}{I}}$  e periodo

$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}}$ . Si noti che non si sono fatte assunzioni circa l'ampiezza delle oscillazioni: un pendolo di torsione si comporta come un oscillatore armonico per qualsiasi valore di  $\theta$ , purché sia valida la relazione  $M = k\theta$ .



**Figura 14 Pendolo di torsione**

La soluzione generale dell'equazione dell'oscillatore armonico è  $\theta = A\sin(\omega t + \varphi)$ . Applicando le condizioni al contorno  $\theta(0) = \theta_0$  e  $\Omega(0) \equiv \left. \frac{d\theta}{dt} \right|_0 = 0$ , si ottengono le dipendenze dal tempo di  $\theta$  e

della velocità angolare  $\Omega = \frac{d\theta}{dt}$ :

$$\begin{cases} \theta = \theta_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \\ \Omega = \frac{d\theta}{dt} = \theta_0 \omega \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

In un pendolo di torsione ideale (i.e. in assenza di attriti) l'energia meccanica totale, inizialmente pari all'energia potenziale elastica  $U = \frac{1}{2}k\theta_0^2$ , si conserva:

$$\frac{1}{2}k\theta_0^2 = \frac{1}{2}k\theta^2 + \frac{1}{2}I\Omega^2$$

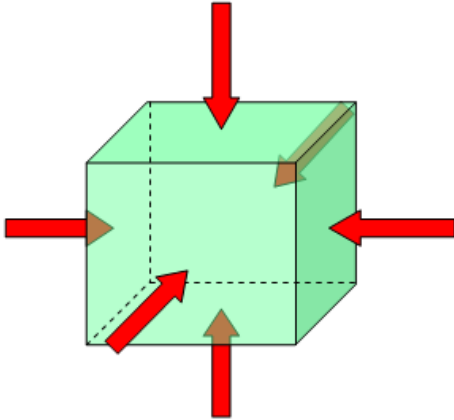
### Compressione uniforme

La compressione uniforme consiste nell'applicare alla superficie di un corpo una forza per unità di superficie (pressione) ovunque costante. Questo si realizza ad esempio immergendo un oggetto in un fluido.

Per effetto della compressione il volume dell'oggetto diminuisce:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{1}{\beta}\Delta p \quad \text{dove } p \text{ è la pressione e } \beta \text{ è il modulo di compressibilità. Se la variazione di}$$

volume è osservata a temperatura costante, si parla di modulo di compressibilità isoterma.



**Figura 15 Compressione uniforme**

Il modulo di compressibilità ha le stesse dimensioni della pressione e si esprime in pascal (Pa). Il segno negativo indica che per un aumento di pressione si ha una diminuzione di volume. Le deformazioni elastiche discusse finora riguardavano soltanto corpi in fase solida. La compressione uniforme si osserva invece anche per liquidi e gas. Nel caso di fluidi la compressione è sempre elastica: il fluido ritorna al volume originale quando la pressione torna al valore iniziale.

Una compressione comporta sempre una variazione della densità:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow d\rho = -\frac{m}{V^2} dV \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV}{V}$$

Quindi:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{1}{\beta} \Delta p$$

Nella Tabella 5 sono riportati i valori del modulo di compressibilità isoterma per alcuni materiali.

**Tabella 5 Valori del modulo di compressibilità isoterma**

Materiale	$\beta$ (GPa)
Acciaio	160
Acqua	2,1
Alluminio	70
Ferro	170
Mercurio	28
Ottone	61
Rame	140
Tungsteno	200
Vetro	50÷55

Si vede che solidi e liquidi sono poco comprimibili. Ad esempio per ridurre dell'1% un volume d'acqua occorre applicare una sovra-pressione  $\Delta p$  pari a:

$$\frac{\Delta V}{V} = -0,01 = -\frac{\Delta p}{2,1 \times 10^9} \Rightarrow \Delta p = 2,1 \times 10^7 \text{ Pa} \approx 200 \times p_{\text{atmosferica}}$$

Tra  $\beta$  e le altre costanti elastiche esiste la relazione:

$$\beta = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

I gas sono invece molto comprimibili. Il modulo di compressibilità isoterma può essere calcolato molto facilmente per i gas ideali. Per essi vale infatti la legge di Boyle:  $pV = \text{costante}$ . Essa ci dice che se raddoppia la pressione, il volume dimezza.

Per differenziazione, si ottiene:  $p dV + V dp = 0$ . Dividendo questa espressione per  $pV$  si ottiene:

$$\frac{dV}{V} = -\frac{dp}{p} \Rightarrow \beta = p$$